```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\2010-08"];
<< KnotTheory`
<< pA.m
```

```
Loading KnotTheory` version of April 20, 2009, 14:18:34.482.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.
```

```
pA[pd_PD] := Module[
   {cd, res, vars},
   cd = CircuitDiagram @@ (pd /. x_X :> If[PositiveQ[x], Xp @@ x, Xm @@ x]);
   cd = cd /. {
      Xp[i_, 1, k_, l_] :> Xp[i, 0, k, l],
      Xp[i_, j_, 1, l_] :> Xp[i, j, 0, l],
      Xm[i_, j_, 1, l_] :> Xm[i, j, 0, l],
      Xm[i_, j_, k_, 1] :> Xm[i, j, k, 0]
     };
   res = Last[pA[cd]] /. {W[i_] :> i};
   vars = Union[Cases[res, t[i_] :> i, Infinity]];
   res /. Thread[(t /@ vars) -> (Array[t, {Length[vars]}])]
  ];
pA[other_] := pA[PD[other]]
```

```
pA[Knot[3, 1]]
```

KnotTheory::loading : Loading precomputed data in PD4Knots`.

$$-t[1]+t[1]^2-t[1]^3$$

```
Alexander[Knot[3, 1]][t[1]]
```

$$-1+\frac{1}{t[1]}+t[1]$$

```
Test[K_Knot] := (K -> Simplify[pA[K] / Alexander[K][t[1]]])
```

```
Test[Knot[3, 1]]
```

$$\text{Knot}[3, 1] \to -t[1]^2$$

```
Test /@ AllKnots[{3, 10}]
```

$$\{\text{Knot}[3, 1] \to -t[1]^2, \text{Knot}[4, 1] \to -t[1]^3, \text{Knot}[5, 1] \to -t[1]^3, \text{Knot}[5, 2] \to -t[1]^3,$$
$$\text{Knot}[6, 1] \to -t[1]^4, \text{Knot}[6, 2] \to -t[1]^4, \text{Knot}[6, 3] \to -t[1]^3, \text{Knot}[7, 1] \to -t[1]^4,$$
$$\text{Knot}[7, 2] \to -t[1]^4, \text{Knot}[7, 3] \to -t[1]^4, \text{Knot}[7, 4] \to -t[1]^4, \text{Knot}[7, 5] \to -t[1]^4,$$
$$\text{Knot}[7, 6] \to -t[1]^4, \text{Knot}[7, 7] \to -t[1]^5, \text{Knot}[8, 1] \to -t[1]^5, \text{Knot}[8, 2] \to -t[1]^5,$$
$$\text{Knot}[8, 3] \to -t[1]^5, \text{Knot}[8, 4] \to -t[1]^5, \text{Knot}[8, 5] \to -t[1]^5, \text{Knot}[8, 6] \to -t[1]^5,$$

Knot[8, 7] → -t[1]^4, Knot[8, 8] → -t[1]^4, Knot[8, 9] → -t[1]^5, Knot[8, 10] → -t[1]^4,
Knot[8, 11] → -t[1]^5, Knot[8, 12] → -t[1]^5, Knot[8, 13] → -t[1]^4, Knot[8, 14] → -t[1]^5,
Knot[8, 15] → -t[1]^5, Knot[8, 16] → -t[1]^4, Knot[8, 17] → -t[1]^5, Knot[8, 18] → -t[1]^4,
Knot[8, 19] → -t[1]^4, Knot[8, 20] → -t[1]^5, Knot[8, 21] → -t[1]^5, Knot[9, 1] → -t[1]^5,
Knot[9, 2] → -t[1]^5, Knot[9, 3] → -t[1]^5, Knot[9, 4] → -t[1]^5, Knot[9, 5] → -t[1]^5,
Knot[9, 6] → -t[1]^5, Knot[9, 7] → -t[1]^5, Knot[9, 8] → -t[1]^5, Knot[9, 9] → -t[1]^5,
Knot[9, 10] → -t[1]^5, Knot[9, 11] → -t[1]^5, Knot[9, 12] → -t[1]^5, Knot[9, 13] → -t[1]^5,
Knot[9, 14] → -t[1]^6, Knot[9, 15] → -t[1]^5, Knot[9, 16] → -t[1]^5, Knot[9, 17] → -t[1]^6,
Knot[9, 18] → -t[1]^5, Knot[9, 19] → -t[1]^6, Knot[9, 20] → -t[1]^5, Knot[9, 21] → -t[1]^5,
Knot[9, 22] → -t[1]^6, Knot[9, 23] → -t[1]^5, Knot[9, 24] → -t[1]^5, Knot[9, 25] → -t[1]^5,
Knot[9, 26] → -t[1]^6, Knot[9, 27] → -t[1]^4, Knot[9, 28] → -t[1]^5, Knot[9, 29] → -t[1]^6,
Knot[9, 30] → -t[1]^5, Knot[9, 31] → -t[1]^5, Knot[9, 32] → -t[1]^6, Knot[9, 33] → -t[1]^5,
Knot[9, 34] → -t[1]^5, Knot[9, 35] → -t[1]^5, Knot[9, 36] → -t[1]^5, Knot[9, 37] → -t[1]^6,
Knot[9, 38] → -t[1]^5, Knot[9, 39] → -t[1]^6, Knot[9, 40] → -t[1]^6, Knot[9, 41] → -t[1]^6,
Knot[9, 42] → -t[1]^6, Knot[9, 43] → -t[1]^5, Knot[9, 44] → -t[1]^5, Knot[9, 45] → -t[1]^5,
Knot[9, 46] → -t[1]^6, Knot[9, 47] → -t[1]^5, Knot[9, 48] → -t[1]^6, Knot[9, 49] → -t[1]^6,
Knot[10, 1] → -t[1]^6, Knot[10, 2] → -t[1]^6, Knot[10, 3] → -t[1]^6, Knot[10, 4] → -t[1]^6,
Knot[10, 5] → -t[1]^5, Knot[10, 6] → -t[1]^6, Knot[10, 7] → -t[1]^6, Knot[10, 8] → -t[1]^6,
Knot[10, 9] → -t[1]^6, Knot[10, 10] → -t[1]^5, Knot[10, 11] → -t[1]^6, Knot[10, 12] → -t[1]^5,
Knot[10, 13] → -t[1]^6, Knot[10, 14] → -t[1]^6, Knot[10, 15] → -t[1]^5, Knot[10, 16] → -t[1]^6,
Knot[10, 17] → -t[1]^5, Knot[10, 18] → -t[1]^6, Knot[10, 19] → -t[1]^5, Knot[10, 20] → -t[1]^6,
Knot[10, 21] → -t[1]^6, Knot[10, 22] → -t[1]^6, Knot[10, 23] → -t[1]^5, Knot[10, 24] → -t[1]^6,
Knot[10, 25] → -t[1]^6, Knot[10, 26] → -t[1]^6, Knot[10, 27] → -t[1]^5, Knot[10, 28] → -t[1]^5,
Knot[10, 29] → -t[1]^6, Knot[10, 30] → -t[1]^6, Knot[10, 31] → -t[1]^5, Knot[10, 32] → -t[1]^6,
Knot[10, 33] → -t[1]^5, Knot[10, 34] → -t[1]^5, Knot[10, 35] → -t[1]^6, Knot[10, 36] → -t[1]^6,
Knot[10, 37] → -t[1]^5, Knot[10, 38] → -t[1]^6, Knot[10, 39] → -t[1]^6, Knot[10, 40] → -t[1]^5,
Knot[10, 41] → -t[1]^6, Knot[10, 42] → -t[1]^5, Knot[10, 43] → -t[1]^5, Knot[10, 44] → -t[1]^7,
Knot[10, 45] → -t[1]^6, Knot[10, 46] → -t[1]^6, Knot[10, 47] → -t[1]^5, Knot[10, 48] → -t[1]^5,
Knot[10, 49] → -t[1]^6, Knot[10, 50] → -t[1]^6, Knot[10, 51] → -t[1]^5, Knot[10, 52] → -t[1]^5,
Knot[10, 53] → -t[1]^6, Knot[10, 54] → -t[1]^5, Knot[10, 55] → -t[1]^6, Knot[10, 56] → -t[1]^6,
Knot[10, 57] → -t[1]^5, Knot[10, 58] → -t[1]^6, Knot[10, 59] → -t[1]^6, Knot[10, 60] → -t[1]^7,
Knot[10, 61] → -t[1]^6, Knot[10, 62] → -t[1]^5, Knot[10, 63] → -t[1]^6, Knot[10, 64] → -t[1]^6,
Knot[10, 65] → -t[1]^5, Knot[10, 66] → -t[1]^6, Knot[10, 67] → -t[1]^6, Knot[10, 68] → -t[1]^5,
Knot[10, 69] → -t[1]^6, Knot[10, 70] → -t[1]^6, Knot[10, 71] → -t[1]^5, Knot[10, 72] → -t[1]^6,
Knot[10, 73] → -t[1]^6, Knot[10, 74] → -t[1]^6, Knot[10, 75] → -t[1]^7, Knot[10, 76] → -t[1]^6,
Knot[10, 77] → -t[1]^5, Knot[10, 78] → -t[1]^6, Knot[10, 79] → -t[1]^5, Knot[10, 80] → -t[1]^6,
Knot[10, 81] → -t[1]^5, Knot[10, 82] → -t[1]^6, Knot[10, 83] → -t[1]^5, Knot[10, 84] → -t[1]^5,
Knot[10, 85] → -t[1]^5, Knot[10, 86] → -t[1]^6, Knot[10, 87] → -t[1]^6, Knot[10, 88] → -t[1]^6,
Knot[10, 89] → -t[1]^6, Knot[10, 90] → -t[1]^6, Knot[10, 91] → -t[1]^5, Knot[10, 92] → -t[1]^6,
Knot[10, 93] → -t[1]^5, Knot[10, 94] → -t[1]^6, Knot[10, 95] → -t[1]^5, Knot[10, 96] → -t[1]^6,
Knot[10, 97] → -t[1]^6, Knot[10, 98] → -t[1]^6, Knot[10, 99] → -t[1]^5, Knot[10, 100] → -t[1]^5,

```
 Knot[10, 101] → -t[1]^6, Knot[10, 102] → -t[1]^6, Knot[10, 103] → -t[1]^5, Knot[10, 104] → -t[1]^5,
 Knot[10, 105] → -t[1]^5, Knot[10, 106] → -t[1]^6, Knot[10, 107] → -t[1]^5, Knot[10, 108] → -t[1]^5,
 Knot[10, 109] → -t[1]^5, Knot[10, 110] → -t[1]^6, Knot[10, 111] → -t[1]^6, Knot[10, 112] → -t[1]^5,
 Knot[10, 113] → -t[1]^6, Knot[10, 114] → -t[1]^5, Knot[10, 115] → -t[1]^5, Knot[10, 116] → -t[1]^5,
 Knot[10, 117] → -t[1]^5, Knot[10, 118] → -t[1]^5, Knot[10, 119] → -t[1]^6, Knot[10, 120] → -t[1]^6,
 Knot[10, 121] → -t[1]^5, Knot[10, 122] → -t[1]^5, Knot[10, 123] → -t[1]^6, Knot[10, 124] → -t[1]^5,
 Knot[10, 125] → -t[1]^6, Knot[10, 126] → -t[1]^6, Knot[10, 127] → -t[1]^6, Knot[10, 128] → -t[1]^5,
 Knot[10, 129] → -t[1]^6, Knot[10, 130] → -t[1]^6, Knot[10, 131] → -t[1]^6, Knot[10, 132] → -t[1]^6,
 Knot[10, 133] → -t[1]^5, Knot[10, 134] → -t[1]^5, Knot[10, 135] → -t[1]^5, Knot[10, 136] → -t[1]^6,
 Knot[10, 137] → -t[1]^7, Knot[10, 138] → -t[1]^7, Knot[10, 139] → -t[1]^5, Knot[10, 140] → -t[1]^5,
 Knot[10, 141] → -t[1]^6, Knot[10, 142] → -t[1]^5, Knot[10, 143] → -t[1]^6, Knot[10, 144] → -t[1]^5,
 Knot[10, 145] → -t[1]^6, Knot[10, 146] → -t[1]^6, Knot[10, 147] → -t[1]^6, Knot[10, 148] → -t[1]^6,
 Knot[10, 149] → -t[1]^6, Knot[10, 150] → -t[1]^5, Knot[10, 151] → -t[1]^5, Knot[10, 152] → -t[1]^5,
 Knot[10, 153] → -t[1]^6, Knot[10, 154] → -t[1]^5, Knot[10, 155] → -t[1]^6, Knot[10, 156] → -t[1]^5,
 Knot[10, 157] → -t[1]^5, Knot[10, 158] → -t[1]^6, Knot[10, 159] → -t[1]^5,
 Knot[10, 160] → -t[1]^5, Knot[10, 161] → -t[1]^5, Knot[10, 162] → -t[1]^6,
 Knot[10, 163] → -t[1]^5, Knot[10, 164] → -t[1]^5, Knot[10, 165] → -t[1]^6}
```

```
pA[L = Link["L8a21"]]
```

$$-t[1]+t[1]^2-t[2]+2\,t[1]\,t[2]-t[1]^2\,t[2]-t[3]+2\,t[1]\,t[3]-t[1]^2\,t[3]+2\,t[2]\,t[3]-3\,t[1]\,t[2]\,t[3]+t[1]^2\,t[2]\,t[3]-t[4]+3\,t[1]\,t[4]-2\,t[1]^2\,t[4]+t[2]\,t[4]-2\,t[1]\,t[2]\,t[4]+t[1]^2\,t[2]\,t[4]+t[3]\,t[4]-2\,t[1]\,t[3]\,t[4]+t[1]^2\,t[3]\,t[4]-t[2]\,t[3]\,t[4]+t[1]\,t[2]\,t[3]\,t[4]$$

```
Skeleton[L]
```

```
{Loop[1, 2, 3, 4], Loop[5, 6, 7, 8], Loop[9, 10, 11, 12], Loop[13, 14, 15, 16]}
```

```
MultivariableAlexander[L][t]
```

KnotTheory::loading : Loading precomputed data in MultivariableAlexander4Links`.

$$\left(-t[1]-t[2]+t[1]\,t[2]-t[3]+t[1]\,t[3]+2\,t[2]\,t[3]-t[1]\,t[2]\,t[3]-t[4]+2\,t[1]\,t[4]+t[2]\,t[4]-t[1]\,t[2]\,t[4]+t[3]\,t[4]-t[1]\,t[3]\,t[4]-t[2]\,t[3]\,t[4]\right)\Big/\left(\sqrt{t[1]}\,\sqrt{t[2]}\,\sqrt{t[3]}\,\sqrt{t[4]}\right)$$

```
Test[L_Link] := (L → Simplify[Product[Sqrt[t[i]], {i, Length[Skeleton[L]]}] *
     pA[L] / (1 - t[1]) / MultivariableAlexander[L][t]])
```

```
Test[L]
```

```
Link[8, Alternating, 21] → t[1] t[2] t[3] t[4]
```

```
Print /@ (Test /@ AllLinks[{2, 8}]);
```

$$\text{Link}[2,\text{Alternating},1]\to\frac{\sqrt{t[2]}}{\sqrt{t[1]}}$$

$$\text{Link}[4,\text{Alternating},1]\to t[1]\,t[2]$$

$$\text{Link}[5,\text{Alternating},1]\to t[1]\,t[2]$$

$$\text{Link}[6,\text{Alternating},1]\to t[1]\,t[2]^2$$

$$\text{Link}[6,\text{Alternating},2]\to t[1]^{3/2}\,t[2]^{3/2}$$

$$\text{Link}[6,\text{Alternating},3]\to t[1]^{3/2}\,t[2]^{3/2}$$

$$\text{Link}[6, \text{Alternating}, 4] \to t[1]\, t[2]\, t[3]^2$$

$$\text{Link}[6, \text{Alternating}, 5] \to t[1]\, t[2]\, t[3]$$

$$\text{Link}[6, \text{NonAlternating}, 1] \to t[1]\, t[2]\, t[3]^2$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 1] \to t[1]\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 2] \to t[1]\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 3] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 4] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 5] \to t[1]^{3/2}\, t[2]^{3/2}$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 6] \to t[1]^{3/2}\, t[2]^{5/2}$$

$$\text{Link}[7, \text{Alternating}, 7] \to t[1]\, t[2]\, t[3]^2$$

$$\text{Link}[7, \text{NonAlternating}, 1] \to t[1]\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[7, \text{NonAlternating}, 2] \to t[1]\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 1] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 2] \to t[1]\, t[2]^4$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 3] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 4] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 5] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 6] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 7] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 8] \to t[1]^{3/2}\, t[2]^{7/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 9] \to t[1]^{3/2}\, t[2]^{5/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 10] \to t[1]^{3/2}\, t[2]^{5/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 11] \to t[1]^{3/2}\, t[2]^{5/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 12] \to t[1]^2\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 13] \to t[1]^2\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 14] \to t[1]^2\, t[2]^2$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 15] \to t[1]\, t[2]\, t[3]^2$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 16] \to t[1]\, t[2]^{3/2}\, t[3]^{3/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 17] \to t[1]\, t[2]^{3/2}\, t[3]^{3/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 18] \to t[1]\, t[2]^{3/2}\, t[3]^{5/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 19] \to t[1]\, t[2]^{3/2}\, t[3]^{5/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 20] \to \frac{t[1]\,(-1+t[2])\,t[2]\,t[3]^3\left(t[2]^2+t[1]\,t[3]+t[2]\,(-1-t[1]\,(-2+t[3])+2\,t[3])\right)}{(-1+t[3])\,(t[3]\,(-1+2\,t[2]+t[3])+t[1]\,(t[2]+2\,t[3]-t[2]\,t[3]))}$$

$$\text{Link}[8, \text{Alternating}, 21] \to t[1]\, t[2]\, t[3]\, t[4]$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 1] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 2] \to t[1]\, t[2]^3$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 3] \to t[1]\, t[2]^{3/2}\, t[3]^{3/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 4] \to t[1]\, t[2]^{3/2}\, t[3]^{3/2}$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 5] \to t[1]\, t[2]\, t[3]^2$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 6] \to \frac{t[1]\, t[2]\, \left(-1 + t[2]^2\right)\, t[3]^3\, (t[2] + t[1]\, t[3])}{(t[1]\, t[2] + t[3])\, \left(-1 + t[3]^2\right)}$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 7] \to t[1]\, t[2]\, t[3]\, t[4]$$

$$\text{Link}[8, \text{NonAlternating}, 8] \to t[1]\, t[2]\, t[3]\, t[4]$$

```
L = Link[8, Alternating, 20];
{mva1, mva2} = Expand[
  {pA[L], mva2 = Product[Sqrt[t[i]], {i, Length[Skeleton[L]]}] *
     (1 - t[1]) * MultivariableAlexander[L][t]}
 ]
```

$$\Big\{-t[2]\, t[3] + 3\, t[1]\, t[2]\, t[3] - 2\, t[1]^2\, t[2]\, t[3] + 2\, t[2]^2\, t[3] - 4\, t[1]\, t[2]^2\, t[3] + 2\, t[1]^2\, t[2]^2\, t[3] - t[2]^3\, t[3] + t[1]\, t[2]^3\, t[3] + t[1]\, t[3]^2 - t[1]^2\, t[3]^2 + 2\, t[2]\, t[3]^2 - 4\, t[1]\, t[2]\, t[3]^2 + 2\, t[1]^2\, t[2]\, t[3]^2 - 2\, t[2]^2\, t[3]^2 + 3\, t[1]\, t[2]^2\, t[3]^2 - t[1]^2\, t[2]^2\, t[3]^2,$$
$$-1 + 3\, t[1] - 2\, t[1]^2 + 2\, t[2] - 4\, t[1]\, t[2] + 2\, t[1]^2\, t[2] + \frac{t[1]\, t[2]}{t[3]} - \frac{t[1]^2\, t[2]}{t[3]} + 2\, t[3] - 4\, t[1]\, t[3] + 2\, t[1]^2\, t[3] - 2\, t[2]\, t[3] + 3\, t[1]\, t[2]\, t[3] - t[1]^2\, t[2]\, t[3] - t[3]^2 + t[1]\, t[3]^2\Big\}$$

```
Simplify[(mva1 /. {t[2] → t[3], t[3] → t[2]}) / mva2]
```

$$t[2]\, t[3]$$

```
L = Link[8, NonAlternating, 6];
{mva1, mva2} = Expand[
  {pA[L], mva2 = Product[Sqrt[t[i]], {i, Length[Skeleton[L]]}] *
     (1 - t[1]) * MultivariableAlexander[L][t]}
 ]
```

$$\Big\{-t[2]\, t[3] + t[1]\, t[2]\, t[3] + t[2]^3\, t[3] - t[1]\, t[2]^3\, t[3] - t[1]\, t[3]^2 + t[1]^2\, t[3]^2 + t[1]\, t[2]^2\, t[3]^2 - t[1]^2\, t[2]^2\, t[3]^2,$$
$$-1 + t[1] - \frac{t[1]\, t[2]}{t[3]} + \frac{t[1]^2\, t[2]}{t[3]} + t[1]\, t[2]\, t[3] - t[1]^2\, t[2]\, t[3] + t[3]^2 - t[1]\, t[3]^2\Big\}$$

```
Simplify[(mva1 /. {t[2] → t[3], t[3] → t[2]}) / mva2]
```

$$t[2]\, t[3]$$